Matrizenrechnung

Anwendungsaufgaben

Teil 1

Themenheft

Arbeiten mit Bedarfsmatrizen

Herstellung von Zwischen- und Endprodukten aus Rohstoffen

Kostenberechnungen

Datei 62311

Friedrich Buckel

Stand: 15. August 2011

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

Hinweise

Der Text 74221 enthält eine Sammlung von Abituraufgaben der beruflichen Gymnasien aus BW.

Einführung an Hand einfacher Aufgaben

Beispiel 1

Ein Unternehmer stellt aus den Rohstoffen A, B, C und D die Endprodukte E, F und G her.

Die Verarbeitung geschieht gemäß folgender Tabelle:

	E	F	G
A	0,3	0,7	0
B	0,3	0	0,35
C	0,4	0,3	0,15
D	0	0	0,5

Die Angaben sind Mengeneinheiten (ME).

Erklärung:

Die 2. Spalte dieser Tabelle besagt, dass das Endprodukt F zu 0,7 = 70% aus dem Rohstoff A und und zu 0,3 = 30% aus C besteht.

Man kann daraus für beliebige Mengen eines Endprodukts berechnen, wie viele ME der Rohstoffe benötigt werden.

Für 40 ME von E ist der
Rohstoffbedarf an A: $40 \cdot 0{,}3\text{ ME} = 12\text{ ME}$
Rohstoffbedarf an B: $40 \cdot 0{,}3\text{ ME} = 12\text{ ME}$
Rohstoffbedarf an C: $40 \cdot 0{,}4\text{ ME} = 16\text{ ME}$
Rohstoffbedarf an D: $40 \cdot 0\text{ ME} = 0\text{ ME}$

Für 28 ME von F ist der
Rohstoffbedarf an A: $28 \cdot 0{,}7\text{ ME} = 19{,}6\text{ ME}$
Rohstoffbedarf an B: $28 \cdot 0\text{ ME} = 0\text{ ME}$
Rohstoffbedarf an C: $28 \cdot 0{,}3\text{ ME} = 8{,}4\text{ ME}$
Rohstoffbedarf an D: $28 \cdot 0\text{ ME} = 0\text{ ME}$

Für 72 ME von G ist der
Rohstoffbedarf an A: $72 \cdot 0\text{ ME} = 0\text{ ME}$
Rohstoffbedarf an B: $72 \cdot 0{,}35\text{ ME} = 25{,}2\text{ ME}$
Rohstoffbedarf an C: $72 \cdot 0{,}15\text{ ME} = 18{,}8\text{ ME}$
Rohstoffbedarf an D: $72 \cdot 0{,}5\text{ ME} = 36\text{ ME}$

Für den Gesamtbedarf muss man addieren:

Rohstoffbedarf an A: $12\text{ ME} + 19{,}6\text{ ME} + 0\text{ ME} = 31{,}6\text{ ME}$
Rohstoffbedarf an B: $12\text{ ME} + 0\text{ ME} + 25{,}2\text{ ME} = 37{,}2\text{ ME}$
Rohstoffbedarf an C: $16\text{ ME} + 8{,}4\text{ ME} + 10{,}8\text{ ME} = 35{,}2\text{ ME}$
Rohstoffbedarf an D: $0\text{ ME} + 0\text{ ME} + 36\text{ ME} = 36\text{ ME}$

Nun zeige ich, wie man mit deutlich weniger Schreibarbeit auskommt, wenn man dies mit der Matrizenrechnung erledigt.

Matrizenlösung

Aus der Tabelle wird eine **Verflechtungsmatrix** erstellt. Diese enthält die Tabellenwerte, die angeben, wie die Rohstoffe mit den Endprodukten verflochten sind. Es ist günstig, sie so zu bezeichnen: (R,E).
Die Bezeichnung deutet an, dass die **R**ohstoffe mit den **E**ndprodukten verflochten werden. Wenn später Zwischenprodukte eine Rolle spielen, dann gibt es z. B. noch (R,Z)- und (Z,E)-Matrizen!
Hier also erstellen wir die **Verflechtungsmatrix**

Aus

	E	F	G
A	0,3	0,7	0
B	0,3	0	0,35
C	0,4	0,3	0,15
D	0	0	0,5

wird $(R,E)=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}35 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}15 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

Es wird hier vorausgesetzt, dass der Leser die Grundlagen der Matrizenrechnung beherrscht.

Aus der Bestellung wird der **Produktionsvektor** erstellt: $\vec{p}=\begin{pmatrix} 40 \\ 28 \\ 72 \end{pmatrix}$.

Er besagt, dass 40 ME von E, 28 ME von F und 72 ME von G produziert werden müssen.

Der gesamte Rohstoffbedarf wird dann dadurch ermittelt, dass man die Matrix (R,E) mit dem Produktionsvektor $\vec{p}$ multipliziert:

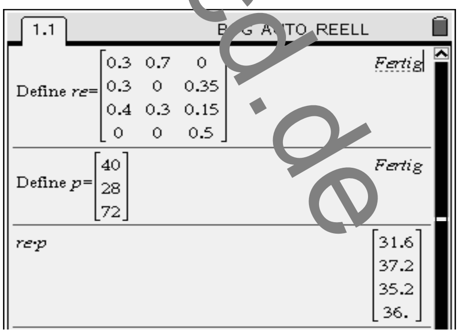
$$(R,E)\cdot\vec{p}=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}35 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}15 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 40 \\ 28 \\ 72 \end{pmatrix}$$

Die superausführliche Rechnung (Zeile „mal“ Spalte“) sieht dann so aus:

$$(R,E)\cdot\vec{p}=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}35 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}15 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 40 \\ 28 \\ 72 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}3\cdot 40+0{,}7\cdot 28+0\cdot 72 \\ 0{,}3\cdot 40+0\cdot 28+0{,}35\cdot 72 \\ 0{,}4\cdot 40+0{,}3\cdot 28+0{,}15\cdot 72 \\ 0\cdot 40+0\cdot 28+0{,}5\cdot 72 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 31{,}6 \\ 37{,}2 \\ 35{,}2 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Wie man sieht, sind das genau dieselben Rechnungen wie sie auf der Seite zuvor mit viel mehr Schreibarbeit erstellt worden sind. Die Definition des ***Skalarprodukts*** aus „Zeilenvektor der Matrix“ mit dem Produktionsvektor erfüllt genau die Bedürfnisse dieser Berechnung. Zuerst werden die Anteile mit den Stückzahlen multipliziert, und dann wird addiert.

Mit dem CAS-Rechner TI Nspire sieht dies so aus:
Man kann die Multiplikation auch sofort eintippen und rechnen lassen. Ich habe zuerst Matrix und Vektor definiert und dann erst das Produkt berechnen lassen. Das ist dann von Vorteil, wenn man damit noch weiter rechnen muss, dann kennt sie der Rechner bereits.



Beispiel 2

Ein Spielzeughersteller baut 5 Typen von kleinen Autos. Er benötigt u. a. diese 4 Bauteile dazu:

Bodenbleche: Für alle verwendet er dasselbe Bodenblech: B

Seitenwände: Von den linken und rechten Wänden die nur spiegelverkehrt sind, rechnet er pro Auto je 1 Paar. Aber er hat 3 verschiedene Modelle Seitenwände, die sich in Form und Farbe unterscheiden: S_1, S_2 und S_3.

Oberseite: Rückfront, Dach und Vorderseite sind an einem Stück. Er hat dazu 2 Modelle, von denen jedes zu den 3 Paaren an Seitenwänden passen. Sie müssen nur unterschiedlich gebogen werden: D_1 und D_2

Räder: Jeweils 4 gleiche Räder pro Auto. Es gibt aber weiße Räder und schwarze Räder. R_w und R_s.

Seine Planung geht aus dieser Verflechtungsmatrix hervor:

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
B	1	1	1	1	1
S_1	1	1	0	0	0
S_2	0	0	1	0	0
S_3	0	0	0	1	1
D_1	1	0	1	1	0
D_2	0	1	0	0	1
R_w	0	1	0	1	1
R_s	1	0	1	0	0

Für die nächste Produktionsperiode plant er 2000 Autos vom Typ M_1, 1500 M_2, 4200 M_3, 3000 M_4 und 1000 M_5.

Berechne den Materialbedarf dafür.

$$(R,M) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Produktionsvektor:} \qquad \vec{p} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 1500 \\ 4200 \\ 3000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = (R,M)\cdot\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 1500 \\ 4200 \\ 3000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000+1500+4200+3000+1000 \\ 2000+1500 \\ 4200 \\ 3000+1000 \\ 2000+4200+3000 \\ 1500+1000 \\ 1500+3000+1000 \\ 2000+4200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11700 \\ 3500 \\ 4200 \\ 4000 \\ 9200 \\ 2500 \\ 5500 \\ 6200 \end{pmatrix}$$

Der letzte Vektor ist also der **Bedarfsvektor** $\vec{b}$ für die 8 Einzelteile. Nun werden wir noch die Materialkosten für diese Menge an Spielzeugautos berechnen.

Dazu geben wir einen **Kostenvektor** an.

Er hat 8 Zellen, in denen die Preise für die 8 Einzelteile stehen:

Die Einheit sind Geldeinheiten (GE).

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 0{,}20 \\ 0{,}35 \\ 0{,}35 \\ 0{,}40 \\ 0{,}50 \\ 0{,}28 \\ 0{,}48 \\ 0{,}52 \end{pmatrix}$$

Es ist jetzt klar, dass man bei jeder Sorte Einzelteile die Stückzahl mit dem Stückpreis multiplizieren muss. Dann werden alle Preise addiert. Das leistet wieder unsere Matrizenmultiplikation, die ja hier eigentlich eine Vektormultiplikation ist. Wenn man reine Matrizenrechnung betreibt, muss man den links stehenden Vektor als Zeilenvektor schreiben, d.h. er wird transponiert, damit man am Ende einen Zahlenwert (Skalar) zu erhalten.

Wie rechnen also: Bedarfs oder Stücklisten-Vektor mal Kostenvektor:

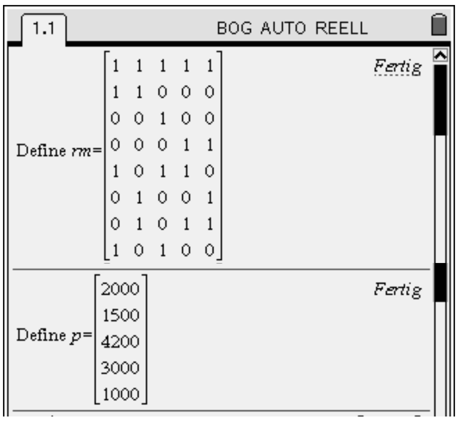
$$MK = \vec{b}^T \cdot \vec{k} = \begin{pmatrix} 11700 & 3500 & 4200 & 4000 & 9200 & 2500 & 5500 & 6200 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}20 \\ 0{,}35 \\ 0{,}35 \\ 0{,}40 \\ 0{,}50 \\ 0{,}28 \\ 0{,}48 \\ 0{,}52 \end{pmatrix}$$

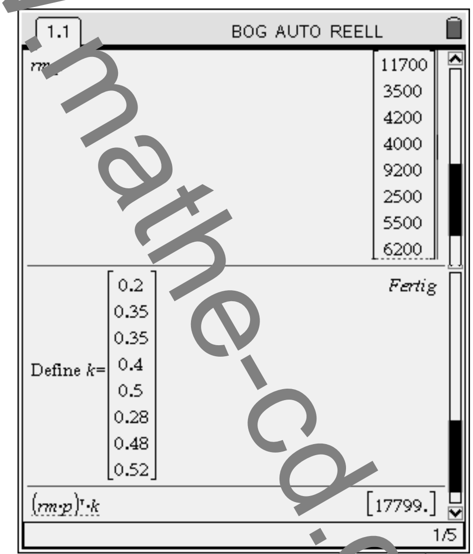
Für die Materialkosten MK erhält man daraus:

$$MK = 11700 \cdot 0{,}2 + 3500 \cdot 0{,}35 + 4200 \cdot 0{,}35 + 4000 \cdot 0{,}4 + 9200 \cdot 0{,}5 + 2500 \cdot 0{,}28 + 5500 \cdot 0{,}48 + 6200 \cdot 0{,}52$$

$$MK = 11799 \ \text{(GE)}$$

Wie sieht das mit einem CAS-Rechner aus?





Man sieht, wie nützlich es ist, wenn die Vektoren oder Matrizen Namen haben. So konnte am Ende ganz einfach in einer knappen Zeile die Kostenberechnung angeordnet werden!

Beispiel 3

Die *Frujog* GmbH stellt unter andrem Joghurts mit verschiedenem Fettgehalt her. 0,1%, 1% und 5 %. Diese gibt es ohne Fruchtzusatz (Natur), aber auch mit Fruchtzusätzen

Himbeere (H), Mango (M), Banane (B) und Pfirsich (P).

Sie kann nun diese Zusätze mischen und dabei verschiedene Geschmacksrichtungen anbieten:

Gramm	J1	J2	J3	J4	J5	J6
Fett	0,1	5	1	1	5	5
H	0	0	0	10	0	10
M	0	0	10	0	0	0
B	0	0	0	10	20	10
P	0	0	10	0	0	10

Die Sorten J1 und J2 sind „natur“ ohne Geschmackszusatz, J1 ist Magerjoghurt mit 0,1 % Fett, J2 ist Fettstufe mit 5% Fettanteil auch natur (ohne Geschmackszusatz). Dann gibt es die Geschmacksvarianten Mango + Pfirsich und Himbeere + Banane, Banane kräftig und die Fruchtmischung „Sommer“ (H+B+P).

Die Produktion soll für den nächsten Monat so eingestellt wird, wie die Markterhebung ergeben hat. J2 wird doppelt so oft verkauft wie J1, J3 und J4 werden 1,5 mal so oft nachgefragt wie J2, die beliebtesten sind J5 und J6. J6 geht 4-mal so gut wie J1 und J5 gar dreimal so gut wie J2.

Stelle den Bedarfsvektor dazu in Abhängigkeit von x auf.

Usw.